

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN Ở NHÀ DÀNH CHO HỌC SINH KHỐI 12

BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM

$1. \int 0 dx = C$ $2. \int dx = x + C$ $3. \int k \cdot dx = kx + C$ $4. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ $5. \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ $6. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ $7. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$ $8. \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$ $9. \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C$ $10. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ $11. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C$ $12. \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ $13. \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$ $14. \int e^x dx = e^x + C$	$15. \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ $16. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $17. \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$ $18. \int \cos x dx = \sin x + C$ $19. \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ $20. \int \sin x dx = -\cos x + C$ $21. \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ $22. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $23. \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$ $24. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ $25. \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$ $26. \int \tan x dx = -\ln \cos x + C$ $27. \int \cot x dx = \ln \sin x $ $28. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
--	---

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số dạng 1:
$$\int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

Trong đó: $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K , $y = f(u)$ liên tục và hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K , $a, b \in K$.

2. Phương pháp tích phân từng phần: Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K , a, b

$$\in K \text{ thì: } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Chú ý: Cần xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm. Trong phương pháp tích phân từng phần, ta cần chọn sao cho $\int_a^b v du$ dễ tính hơn $\int_a^b u dv$.

3. Phương pháp đổi biến số dạng 2:

$f(x)$ có chứa	Cách đổi biến
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = a \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = a \cot t, \quad 0 < t < \pi$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{ a }{\sin t}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{ a }{\cos t}, \quad t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} \cdot dx}{\cos^2 x}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$

d) $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx$

f) $\int_0^1 \frac{x^3}{(1 + x^2)^3} dx$

g) $\int_0^1 \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$

h) $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x \ln x}}{x} dx$

i) $\int_1^e \frac{4 \ln x}{x(2 \ln x + 1)} dx$

$$j) \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

$$k) \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx$$

$$l) \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$$

$$c) \int_0^1 (x - 2)e^{2x} dx$$

$$d) \int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$$

$$e) \int_1^e x \ln x dx$$

$$f) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tích phân $\int_0^1 x(x^2 + 3) dx$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. $\frac{4}{7}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Câu 2. Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

A. $e - 1$.

B. $\frac{1}{e} - 1$.

C. $\frac{e-1}{e}$.

D. $\frac{1}{e}$.

Câu 3. Tích phân $\int_0^1 \frac{1}{2x+5} dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2} \log \frac{7}{5}$.

B. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

C. $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}$.

D. $-\frac{4}{35}$.

Câu 4. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx$.

B. $\int_0^1 \cos(1-x) dx = -\int_0^1 \cos x dx$.

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Câu 5. Tích phân $I = \int_0^1 e^{x+1} dx$ bằng

A. $e^2 - 1$.

B. $e^2 - e$.

C. $e^2 + e$.

D. $e - e^2$.

Câu 6. Tích phân $I = \int_0^1 e^{2x} dx$ bằng:

A. $e^2 - 1$.

B. $e - 1$.

C. $\frac{e^2-1}{2}$.

D. $e + \frac{1}{2}$.

Câu 7. Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

A. $2 + \ln \sqrt{3}$.

B. $4 + \ln 3$.

C. $2 + \ln 3$.

D. $1 + \ln \sqrt{3}$.

Câu 8. Tích phân $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 3.

C. 2.

D. $\sqrt{5}$.

Câu 9. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1+x}{x^2} dx$.

A. $I = 1 + \frac{1}{e}$.

B. $I = 2 - \frac{1}{e}$.

C. $I = 2 + \frac{1}{e}$.

D. $I = 1 - \frac{1}{e}$.

Câu 10. Tích phân $\int_1^2 (x+3)^2 dx$ bằng

A. 61.

B. $\frac{61}{3}$.

C. 4.

D. $\frac{61}{9}$.

Câu 11. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$.

D. $I = \frac{9}{4}$.

Câu 12. Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 13. Tích phân $\int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx$ bằng.

A. $2\ln 5$.

B. $\frac{1}{2}\ln 5$.

C. $\ln 5$.

D. $4\ln 5$.

Câu 14. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ bằng?

A. $\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$.

B. $\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$.

C. $-\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$.

D. $-\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$.

Câu 15. Cho $\int_{-2}^1 f(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx$.

A. -9.

B. -3.

C. 3.

D. 5.

Câu 16. Tích phân $\int_0^2 2e^{2x} dx$ bằng

A. e^4 .

B. $e^4 - 1$.

C. $4e^4$.

D. $3e^4 - 1$.

Câu 17. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = -1$.

C. $I = 0$.

D. $I = 1$.

Câu 18. Tích phân $\int_0^2 \min\{x^2, 3x - 2\} dx$ bằng

A. $\frac{-2}{3}$.

B. $\frac{11}{6}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{17}{6}$.

Câu 19. Tính $\int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$

A. $-\frac{\pi^4}{4}$.

B. $-\pi^4$.

C. 0.

D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 20. Tính $J = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

A. $-\pi$.

B. π .

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 21. Tính tích phân $\int_0^3 \text{Max}\{4, x^2\} \, dx$.

A. 12.

B. 21.

C. $\frac{43}{3}$.

D. 9.

Câu 22. Tính tích phân $I = \int_1^{2^{2018}} \frac{dx}{x}$.

A. $I = 2018 \cdot \ln 2 - 1$.

B. $I = 2^{2018}$.

C. $I = 2018 \cdot \ln 2$.

D. $I = 2018$.

Câu 23. Tích phân $I = \int_0^2 2x - 1 \, dx$ có giá trị bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 24. Kết quả của $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \, dx$ bằng

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Câu 25. Tích phân $I = \int_1^e \frac{1}{x+3} \, dx$ bằng:

A. $\ln[4(e+3)]$.

B. $\ln(e-2)$.

C. $\ln(e-7)$.

D. $\ln\left(\frac{3+e}{4}\right)$.

Câu 26. Tính $I = \int_0^1 e^{3x} \, dx$.

A. $I = e^3 - 1$.

B. $I = e - 1$.

C. $\frac{e^3 - 1}{3}$.

D. $I = e^3 + \frac{1}{2}$.

Câu 27. Tích phân $\int_0^{100} x \cdot e^{2x} \, dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}(199e^{200} - 1)$.

B. $\frac{1}{2}(199e^{200} - 1)$.

C. $\frac{1}{4}(199e^{200} + 1)$.

D. $\frac{1}{2}(199e^{200} + 1)$.

Câu 28. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \, dx$ bằng.

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 29. Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2 \ln 2$.

B. $\frac{1}{3} \ln 2$.

C. $\frac{2}{3} \ln 2$.

D. $\ln 2$.

Câu 30. $\int_0^1 e^{3x+1} \, dx$ bằng

A. $\frac{1}{3} e^4 - e$. B. $e^4 - e$. C. $\frac{1}{3} e^4 + e$. D. $e^3 - e$.

Câu 31. $\int_1^2 e^{3x-1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$. B. $\frac{1}{3}e^5 - e^2$. C. $e^5 - e^2$. D. $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$.

Câu 32. Tích phân $I = \int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

A. $2^{2018} - 1$. B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$. C. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$. D. 2^{2018} .

Câu 33. Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$.

A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$. C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Câu 34. Biết $\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_1^4 f(x) dx$.

A. $I = 8$. B. $I = 16$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 35. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x) dx = 9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3) dx$ là

A. 27. B. 3. C. 24. D. 0.

Câu 36. Cho $\int_2^4 f(x) dx = 10$ và $\int_2^4 g(x) dx = 5$. Tính $I = \int_2^4 [3f(x) - 5g(x)] dx$

A. $I = 5$. B. $I = 15$. C. $I = -5$. D. $I = 10$.

Câu 37. Cho $\int_1^2 f(x) dx = a$. Tính $I = \int_0^1 x \cdot f(x^2 + 1) dx$ theo a .

A. $I = 2a$. B. $I = 4a$. C. $I = \frac{a}{2}$. D. $I = \frac{a}{4}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1; 4]$, $f(4) = 2018$, $\int_{-1}^4 f'(x) dx = 2017$. Tính $f(-1)$?

A. $f(-1) = -1$. B. $f(-1) = 1$. C. $f(-1) = 3$. D. $f(-1) = 2$.

Câu 39. Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

A. 1. B. 9. C. 3. D. 7.

Câu 40. Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng

A. 2. B. 1. C. -1. D. 4.

Câu 41. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $\int_0^2 f(2x) dx$

A. 16. B. 4. C. 32. D. 8.

- Câu 42.** Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$.
- A. $I = 6$. B. $I = 36$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.
- Câu 43.** Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2 + ab$.
- A. 10. B. 8. C. 12. D. 6.
- Câu 44.** Biết $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1} dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.
- A. 13. B. 5. C. 4. D. 10.
- Câu 45.** Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ với $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $2ab = -1$. B. $2ab = 1$. C. $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$. D. $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$.
- Câu 46.** Biết tích phân $\int_1^2 (4x-1) \ln x dx = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $2a + b$ bằng
- A. 5. B. 8. C. 10. D. 13.
- Câu 47.** Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a - b = -c$. B. $a + b = -c$. C. $a + b = 3c$. D. $a - b = -3c$.
- Câu 48.** Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a + b = -2c$. B. $a + b = c$. C. $a - b = -c$. D. $a - b = -2c$.
- Câu 49.** Cho $\int_1^e (2 + x \ln x) dx = a.e^2 + b.e + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $a + b = -c$. B. $a + b = c$. C. $a - b = c$. D. $a - b = -c$.
- Câu 50.** Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.
- A. $P = 24$. B. $P = 12$. C. $P = 18$. D. $P = 46$.
- Câu 51.** Cho các số thực a, b khác không. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$ với mọi x khác -1 .
- Biết $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$. Tính $a + b$?
- A. 19. B. 7. C. 8. D. 10.
- Câu 52.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x) dx = 8$. Tính $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2) dx$
- A. 4. B. 16. C. 8. D. 32.

Câu 53. Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$

- A. $T = -3$. B. $T = 3$. C. $T = -4$. D. $T = -5$.

Câu 54. Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của biểu thức $2a + 3b - c$ bằng

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 55. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3 \ln 2$.

Tính $T = a + b$.

- A. $T = -1$. B. $T = 2$. C. $T = -2$. D. $T = 0$

Câu 56. Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{9}$ với a, b là các số thực. Tính tổng $T = a + b$.

- A. $T = -10$. B. $T = -4$. C. $T = 15$. D. $T = 8$.

Câu 57. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx = a \ln b + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a + b + c$?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 58. Cho $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó, giá trị của a là:

- A. $-\frac{26}{27}$. B. $\frac{26}{27}$. C. $\frac{27}{26}$. D. $-\frac{25}{27}$.

Câu 59. Biết rằng $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $T = a + b + c$.

- A. 31. B. 29. C. 33. D. 27.

Câu 60. Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b + c = 4$. B. $a + b + c = -3$. C. $a + b + c = 2$. D. $a + b + c = 6$.

Câu 61. Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = 0$. D. $P = -2$.

Câu 62. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$

- A. $S = 1$. B. $S = 4$. C. $S = 3$. D. $S = 0$.

Câu 63. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x + 1) dx = a\pi + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - c$.

- A. $T = 2$. B. $T = 4$. C. $T = 6$. D. $T = -4$.

Câu 64. Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 7. D. 9.

Câu 65. Cho $\int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx = \frac{a-b\sqrt{3}}{3}$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $a-2b=12$. B. $ab=24$. C. $a-b=10$. D. $a+b=10$.

Câu 66. Giả sử rằng $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó, giá trị của $a+2b$ là

- A. 30. B. 60. C. 50. D. 40.

Câu 67. Tính tích phân $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$. Giá trị $a^2 + ab + 3b^2$ là

- A. 4. B. 5. C. 1. D. 0.

Câu 68. Cho $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = a.e^2 + b.e + c$. Với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a+b+c$.

- A. $S=1$. B. $S=2$. C. $S=0$. D. $S=4$.

Câu 69. Cho biết $\int x e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} (ax+b) + C$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và C là hằng số bất kì. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

- A. $a+2b=0$. B. $b>a$. C. ab . D. $2a+b=0$.

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; 3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2; 3)$. Tính $I = \int_{-1}^2 [f(x) + 2x] dx$, biết $F(-1)=1$ và $F(2)=4$.

- A. $I=6$. B. $I=10$. C. $I=3$. D. $I=9$.

Câu 71. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

- A. 33. B. 25. C. 42. D. 39.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0; 3]$ và thỏa mãn $I = \int_0^3 f(x) dx = 4$. Khi đó

giá trị của tích phân $K = \int_0^3 (e^{1+\ln(f(x))} + 4) dx$ là:

- A. $4+12e$. B. $12+4e$. C. $3e+14$. D. $14+3e$.

Câu 73. Cho tích phân $I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx$ nếu đặt $t = \sqrt{x+1}$ thì I là

- A. $I = \int_1^2 (2t^2 - t) dt$. B. $I = \int_1^2 (2t^2 + 2t) dt$. C. $I = \int_1^2 (2t^2 - 2t) dt$. D. $I = \int_1^2 (t^2 - 2t) dt$.

Câu 74. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng cách đặt $u = \tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du$. B. $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du$. C. $I = -\int_0^1 u^2 du$. D. $I = \int_0^1 u^2 du$.

Hình học: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

1. Véc-tơ pháp tuyến: $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc với mp(P) gọi là VTPT của (P).

2. Phương trình của mặt phẳng: $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 > 0$). VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$.

mp(P) $\begin{cases} \text{qua điểm } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{có vtpt } \vec{n} = (A; B; C) \end{cases} \implies \text{phương trình của (P): } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

3. Mặt phẳng chứa các đoạn chắn: mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$. Phương trình của (P) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Dạng bài tập viết phương trình mặt phẳng:

- (P) vuông góc với đường thẳng qua hai điểm A, B thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = \overrightarrow{AB}$.
- (P) song song với (Q) thì (P) VTPT $\vec{n}_P = \vec{n}_Q$.
- (P) qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.
- (P) chứa đường thẳng AB và song song với đường thẳng CD (hoặc (P) song song với hai đường thẳng AB và CD) thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$.
- (P) qua hai điểm M, N và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\overrightarrow{MN}, \vec{n}_Q]$.
- (P) vuông góc với hai mặt phẳng (Q) và (R) thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\vec{n}_Q, \vec{n}_R]$.
- (P) vuông góc với trục tọa độ thì nhận vectơ đơn vị của trục tọa độ đó làm VTPT.
- (P) vuông góc với đường thẳng d thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = \vec{u}_d$ ($\vec{u}_d$ là VTCP của d)
- (P) chứa trục Ox và điểm M thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\overrightarrow{OM}, \vec{i}]$. $\vec{i} = (1; 0; 0)$ là vectơ đơn vị trục Ox
- (P) chứa trục Oy và điểm M thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\overrightarrow{OM}, \vec{j}]$. $\vec{j} = (0; 1; 0)$ là vectơ đơn vị trục Oy
- (P) chứa trục Oz và điểm M thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\overrightarrow{OM}, \vec{k}]$. $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là vectơ đơn vị trục Oz
- (P) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$, trong đó $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là VTCP của d_1, d_2 (xem bài **đường thẳng**)
- (P) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 (d_1, d_2 chéo nhau) thì (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.
- (P) chứa hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 lấy điểm M_1 và trên d_2 lấy điểm M_2 , (P) có VTPT $\vec{n}_P = [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_1]$ hoặc $\vec{n}_P = [\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_2]$.

BÀI TẬP.

Bài 1. Cho $A(-1; 2; 3)$, $B(2; -4; 3)$, $C(4; 5; 6)$. Viết phương trình mặt phẳng:

- đi qua A và nhận vectơ $\vec{n}(1; -1; 5)$ làm vectơ pháp tuyến
- đi qua A biết rằng hai vectơ có giá song song mp đó là $\vec{a}(1; 2; -1)$, $\vec{b}(2; -1; 3)$
- qua C và vuông góc với đường thẳng AB
- trung trực của đoạn AC
- qua ba điểm A, B, C.

Bài 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

- (α) vuông góc với AB tại A, biết $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; 1)$.
- (α) qua ba điểm $M(2; -1; 3)$, $N(4; 2; 1)$, $P(-1; 2; 3)$.

Bài 3. Trong không gian Oxyz, cho $A(-2; 2; 4)$, $B(-2; 2; 0)$, $C(-5; 2; 0)$, $D(-2; 1; 0)$.

- Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
- Viết PTMP qua D và song song với (ABC).

c) Chứng tỏ A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

d) Viết PTMP qua hai điểm A, B và song song với đường thẳng CD.

Bài 4. Viết phương trình mặt phẳng:

a) chứa trục Ox và điểm A(1; 2; 3)

b) chứa trục Oy và điểm B(-2; 3; 5)

c) chứa trục Oz và điểm C(2; -1; 2)

d) qua M(1; 3; -2) và song song với mpOxy.

Bài 5. Cho tứ diện ABCD có A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)

a) Viết phương trình mp (ACD) và (BCD)

b) Viết PT mp chứa AB và song song CD

c) Viết phương trình mp chứa CD và song song AB.

Bài 6. Cho điểm M(-2; 3; 1).

a) Viết phương trình mp(P) đi qua hình chiếu của M trên các trục tọa độ.

b) Viết phương trình mp đi qua các điểm lần lượt là hình chiếu của M lên các trục tọa độ.

c) Viết PTMP (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho M là trọng tâm tam giác ABC.

c) Viết PTMP (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC.

Bài 7. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) (α) qua A(0; -2; 1) và song song với mặt phẳng (β): $x - 3z + 1 = 0$.

b) (α) qua B(2; 3; -2) và song song với mặt phẳng (β): $x - 3y + 2z - 1 = 0$.

c) (α) qua C(-1; 2; -1) và song song với mặt phẳng (β): $2x + y - 2z + 4 = 0$

d) (α) qua gốc tọa độ và song song với mặt phẳng (β): $4x + y - z + 1 = 0$.

Bài 8. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) (α) qua hai điểm A(3; 1; -1), B(2; -1; 4) và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x - y + 3z + 1 = 0$.

b) (α) qua hai điểm A(-1; 0; 3), B(5; 2; 3) và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x + y - z = 0$

c) (α) qua hai điểm A(1; 0; 1), B(1; 2; 4) và vuông góc với mặt phẳng (β): $x - z + 3 = 0$

d) (α) qua hai điểm A(2; -1; 2), B(1; -2; 3) và vuông góc với mặt phẳng (β): $3x + 2y - 6 = 0$

e) (P) qua hai điểm A(1; 2; 1), B(-2; 2; 0) và vuông góc với mp(Q): $x - y + 2z - 10 = 0$.

Bài 9. Viết phương trình mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) (P) qua điểm M(1; -2; 3) và vuông góc với 2mp (α): $x - y + 2z - 3 = 0$, (β): $2x + 3y - z = 0$.

b) qua B(4; -2; -1) và vuông góc với 2 mp (Oxy), mp (P): $x - y + 2z + 1 = 0$

c) đi qua điểm A(1; 1; 1), vuông góc với 2mp (P_1): $x + 2y + 3z + 4 = 0$, (P_2): $3x + 2y - z + 1 = 0$.

Bài toán vị trí tương đối, khoảng cách và góc.

a) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và (P'): $A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Khi đó:

$$\bullet (P) \text{ cắt } (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}.$$

$$\bullet (P) // (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}.$$

$$\bullet (P) \equiv (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}.$$

$$\bullet \text{ Lưu ý: } (P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n}_P \perp \vec{n}_{P'} \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_{P'} \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0.$$

b) Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng có phương trình: (P): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (Q): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

$$\text{Gọi } \varphi \text{ là góc giữa (P) và (Q). Khi đó: } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

c) **Khoảng cách.** Cho mp(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M(x_M; y_M; z_M)$.

$$d[M, (P)] = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

d) **Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.**

Cho mp(P) và mặt cầu (S) tâm I, bán kính R.

a) $d[I, (P)] > R$: (P) và (S) không có điểm chung.

b) $d[I, (P)] = R$: (P) tiếp xúc với (S) tại điểm M, ta nói (P) là tiếp diện của (S), M là tiếp điểm (M là hình chiếu vuông góc của I lên (P)).

c) $d[I, (P)] < R$: (P) cắt (S) theo một giao tuyến là đường tròn (C) có tâm K và bán kính r. (K là hình chiếu vuông góc của I lên (P), $r = \sqrt{R^2 - d^2[I, (P)]}$).

e) **Tiếp diện của mặt cầu.**

a) (P) là tiếp diện của mặt cầu (S) tâm I tại tiếp điểm M, khi đó (P) qua M và có VTPT $\vec{n_P} = \vec{MI}$.

b) (P) là tiếp diện của mặt cầu (S) tâm I, bán kính R $\Leftrightarrow d[I, (P)] = R$.

BÀI TẬP.

Bài 1. Xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

a) (P): $2x + 3y - z - 5 = 0$ và (Q): $2x + y - z + 8 = 0$.

b) (P): $3x - y - 2z + 7 = 0$ và (Q): $-6x + 2y + 4z + 1 = 0$.

c) (P): $x + y - 3z - 2 = 0$ và (Q): $-3x - 3y + 9z + 6 = 0$.

Bài 2. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P):

a) (P): $2x + 2y - z - 22 = 0$, A(1; 2; -2). b) (P): $3x - 4z - 15 = 0$, A(2; 1; 1).

Bài 3. Viết phương trình mặt cầu (S), biết rằng:

a) (S) có tâm I(2; 1; 2) và tiếp xúc mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 20 = 0$.

b) (S) có tâm I(1; -1; 3) và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x + y - 3z - 7 = 0$.

c) (S) có tâm I nằm trên trục Ox, đi qua điểm A(0; 1; 2) và tiếp xúc với mp(P): $4x - 3y + 7 = 0$.

Bài 4. Cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

a) Tìm tâm I và bán kính của mặt cầu (S).

b) Viết phương trình tiếp diện của (S) tại điểm M(2; -4; 4).

c) Viết phương trình tiếp diện của (S), biết tiếp diện song song với mp(P): $2x - y - 2z + 30 = 0$.

d) Viết phương trình mặt phẳng (Q) tiếp xúc với (S) và song song với (Q): $x + y - 2z + 1 = 0$.

Bài 5. Cho bốn điểm A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm C, D và cách đều hai điểm A, B.

Bài 6. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 8z - 4 = 0$.

a) Tìm tâm và bán kính của (S).

b) Viết phương trình tiếp diện của (S) tại tiếp điểm M(0; 3; -1).

c) Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với (Q): $x + 2y - 2z - 1 = 0$ và tiếp xúc với (S).

d) Viết PT mặt phẳng (P) vuông góc với hai mặt phẳng (α): $x + y - 3z - 1 = 0$, (β): $3x + y + 2 = 0$ và tiếp xúc với (S).